Детерминированый сигнал:

$$s = \{s_1, \dots, s_n\}$$

Аддитивный белый Гауссовский шум $n_ш$:

$$\mu = 0; \quad K = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n\sigma^2 \end{bmatrix}$$

Гипотезы:

$$\begin{cases} H_0: & x = n_ш \\ H_1: & x = n_ш + s \end{cases}$$

Плотности распределения:

$$w(x_1, \dots, x_n | H_0) = \prod_{i=1}^{n} w(x_i | H_0) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 i}} \exp\left\{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2 i}\right\}$$

$$w(x_1, \dots, x_n | H_1) = \prod_{i=1}^{n} w(x_i | H_1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 i}} \exp\left\{-\frac{(x_i - s_i)^2}{2\sigma^2 i}\right\}$$

Соотношение неопределённости:

$$L = \frac{w(x_1, \dots, x_n | H_1)}{w(x_1, \dots, x_n | H_0)} \gtrless_{H_0^*}^{H_1^*} L_{пор}$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{-\frac{(x_i - s_i)^2 - x_i^2}{2\sigma^2 i}\right\} = \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{-\frac{s_i^2 - 2x_i s_i}{2\sigma^2 i}\right\}$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{2x_i s_i}{2\sigma^2 i} - \frac{s_i^2}{2\sigma^2 i}\right] \gtrless_{H_0^*}^{H_1^*} Z_{пор}$$

Вероятность ложной тревоги:

$$\alpha = P(H_1^* | H_0) = P(Z > Z_{пор} | H_0) = \int_{Z_{пор}}^{\infty} w(Z | H_0) dZ$$

Плотность вероятности Z как линейной комбинации отсчётов x_i:

$$w(x_i) = \mathcal{N}(\overline{x}_i, \sigma^2 i); \quad Z = \mathcal{L}[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow w(Z) = \mathcal{N}(\overline{Z}, \sigma_Z^2)$$

Математическое ожидание:

$$\overline{x_i} = \begin{cases} 0, & H_0 \\ s_i, & H_1 \end{cases}$$

$$\overline{Z} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i s_i}{\sigma^2 i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{2\sigma^2 i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{x_i} s_i}{\sigma^2 i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{2\sigma^2 i} = \begin{cases} 0 - C, & H_0 \\ 2C - C, & H_1 \end{cases} = \begin{cases} -C, & H_0 \\ C, & H_1 \end{cases}$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{2\sigma^2 i}$$

Дисперсия:

$$i \neq j \Rightarrow \ \mathcal{D}[x_i + x_j] = \mathcal{D}[x_i] + \mathcal{D}[x_j] + 2\mathrm{cov}[x_i, x_j] = \sigma^2 i + \sigma^2 j$$

$$\sigma_Z^2 = \mathcal{D}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i s_i}{\sigma^2 i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{2\sigma^2 i}\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}\left[x_i\right] \frac{s_i^2}{\sigma^4 i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{\sigma^2 i} = 2C$$

Плотность распределения при отсутствии сигнала:

$$w(Z|H_0) = \mathcal{N}(-C, 2C)$$

Выражение порога через выбранную вероятность ложной тревоги $\alpha = \mathrm{const}$:

$$\alpha = \int_{Z_{\text{пор}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2C}} \exp\left\{-\frac{(Z + C)^2}{2 \cdot 2C}\right\} dZ = 1 - \Phi\left(\frac{Z_{\text{пор}} + C}{\sqrt{2C}}\right)$$

$$Z_{\text{пор}} = \sqrt{2C}\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \sqrt{\frac{C}{2}}$$

$$w(Z|H_1) = \mathcal{N}(C, 2C)$$

Вероятность пропуска:

$$\beta = P(H_0^*|H_1) = P(Z < Z_{\text{пор}}|H_1) = \Phi\left(\frac{Z_{\text{пор}} - C}{\sqrt{2C}}\right)$$

Так как функция Лапласа $\Phi(x)$ неубывающая:

$$\min \beta \to \min \frac{Z_{\text{пор}} - C}{\sqrt{2C}} = \min\left[\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{C}{2}}\right] \Rightarrow \max C$$

Максимизация C методом неопределённых множителей Лагранжа:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{2\sigma^2 i}; \quad \sum_{i=1}^{n} s_i = 1$$

Лагранжиан:

$$\mathcal{L}(s_1, \dots, s_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{2\sigma^2 i} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} s_i - 1\right)$$

Частные производные приравниваются к 0 $\Rightarrow$ выражение для s_i:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s_i} = \frac{s_i}{\sigma^2 i} + \lambda = 0 \Rightarrow s_i = -\lambda\sigma^2 i$$

Выражение λ:

$$\sum_{i=1}^{n}(-\lambda\sigma^2 i) = -\lambda\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} i = -\lambda\sigma^2 \cdot n\frac{n+1}{2} = 1$$

$$\lambda = -\frac{2}{\sigma^2 n(n+1)}$$

Подстановка в s_i:

$$s_i = \frac{2i}{n(n+1)}$$

Максимальное C:

$$C = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n(n+1)}\right)^2 \frac{1}{2\sigma^2 i} = \frac{2}{\sigma^2 n^2(n-1)^2} \cdot n\frac{n-1}{2} = \frac{1}{\sigma^2 n(n-1)}$$

Минимальная вероятность пропуска:

$$\min\beta = \Phi\left(\Phi^{-1}(1-\alpha) - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n(n-1)}}\right)$$