

I. Построение алгоритма обнаружителя

$$\begin{aligned}
 w(x_1, \dots, x_n | H_0) &= \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x_i}{\mu}}, & x_i \geq 0, \quad i = \overline{1 \dots n} \\ 0, & \exists i : x_i < 0 \end{cases} \\
 w(x_1, \dots, x_n | H_1) &= \begin{cases} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x_i - u}{\mu}}, & x_i \geq u, \quad i = \overline{1 \dots n} \\ 0, & \exists i : x_i < u \end{cases} \\
 L &= \frac{w(x_1, \dots, x_n | H_1)}{w(x_1, \dots, x_n | H_0)} \geq_{H_0^*}^{H_1^*} L_{\text{пор}} \\
 L &= \begin{cases} 0, & \exists i : x_i < 0 \\ \frac{0}{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x_i}{\mu}}}, & (x_i \geq 0, \quad i = \overline{1 \dots n}) \cap (\exists i : x_i < u) \\ \frac{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x_i - u}{\mu}}}{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x_i}{\mu}}}, & x_i \geq u, \quad i = \overline{1 \dots n} \end{cases} \\
 L &= \begin{cases} \text{undefined}, & \exists i : x_i < 0 \\ 0, & (x_i \geq 0, \quad i = \overline{1 \dots n}) \cap (\exists i : x_i < u) \\ e^{n \frac{u}{\mu}}, & x_i \geq u, \quad i = \overline{1 \dots n} \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

II. Нахождение теоретических кривых обнаружения

Вероятность ложной тревоги:

$$\alpha = P(H_1^* | H_0) = P(L > L_{\text{пор}} | H_0)$$

$$1. L_{\text{пор}} \in [0, e^{n \frac{u}{\mu}})$$

$$\alpha = P(x_i \geq u, \quad i = \overline{1 \dots n} | H_0) = \prod_{i=1}^n P(x_i \geq u | H_0)$$

$$P(x_i \geq u | H_0) = 1 - P(x_i < u | H_0) = 1 - F_{\text{exp}}(u) = 1 - (1 - e^{-\frac{u}{\mu}}) = e^{-\frac{u}{\mu}}$$

$$\alpha = \prod_{i=1}^n e^{-\frac{u}{\mu}} = e^{-n \frac{u}{\mu}} \quad (2)$$

$$2. L_{\text{пор}} < 0$$

$$\alpha = P((x_i \geq 0, \quad i = \overline{1 \dots n}) \cap (\exists i : x_i < u) | H_0) + P(x_i \geq u, \quad i = \overline{1 \dots n} | H_0)$$

$$P((x_i \geq 0, \quad i = \overline{1 \dots n}) \cap (\exists i : x_i < u) | H_0) = \prod_{i=1}^n P(x_i \geq 0 | H_0) \cdot \left[1 - \prod_{i=1}^n P(x_i \geq u | H_0) \right]$$

$$P(x_i \geq 0 | H_0) = 1 - F_{\text{exp}}(0) = 1$$

$$\alpha = 1$$

$$3. L_{\text{пор}} \geq e^{n \frac{u}{\mu}}$$

$$\alpha = 0$$

Вероятность правильного обнаружения

$$D = P(H_1^*|H_1) = P(L > L_{\text{пор}}|H_1)$$

$$1. L_{\text{пор}} \in [0, e^{n \frac{u}{\mu}})$$

$$D = P(x_i \geq u, \quad i = \overline{1 \dots n} | H_1) = \prod_{i=1}^n P(x_i \geq u | H_1)$$

$$P(x_i \geq u | H_1) = 1 - P(x_i < u | H_1) = 1 - F_{\text{exp}}(0) = 1$$

$$D = 1$$

$$2. L_{\text{пор}} < 0$$

$$D = P((x_i \geq 0, \quad i = \overline{1 \dots n}) \cap (\exists i : x_i < u) | H_1) + P(x_i \geq u, \quad i = \overline{1 \dots n} | H_1)$$

$$P((x_i \geq 0, \quad i = \overline{1 \dots n}) \cap (\exists i : x_i < u) | H_1) = \prod_{i=1}^n P(x_i \geq 0 | H_1) \cdot \left[1 - \prod_{i=1}^n P(x_i \geq u | H_1) \right]$$

$$P(x_i \geq 0 | H_1) = 1$$

$$D = 1 \cdot (1 - 1) + 1 = 1$$

$$3. L_{\text{пор}} \geq e^{n \frac{u}{\mu}}$$

$$D = 0$$

Зависимость вероятности правильного обнаружения от вероятности ложной тревоги:

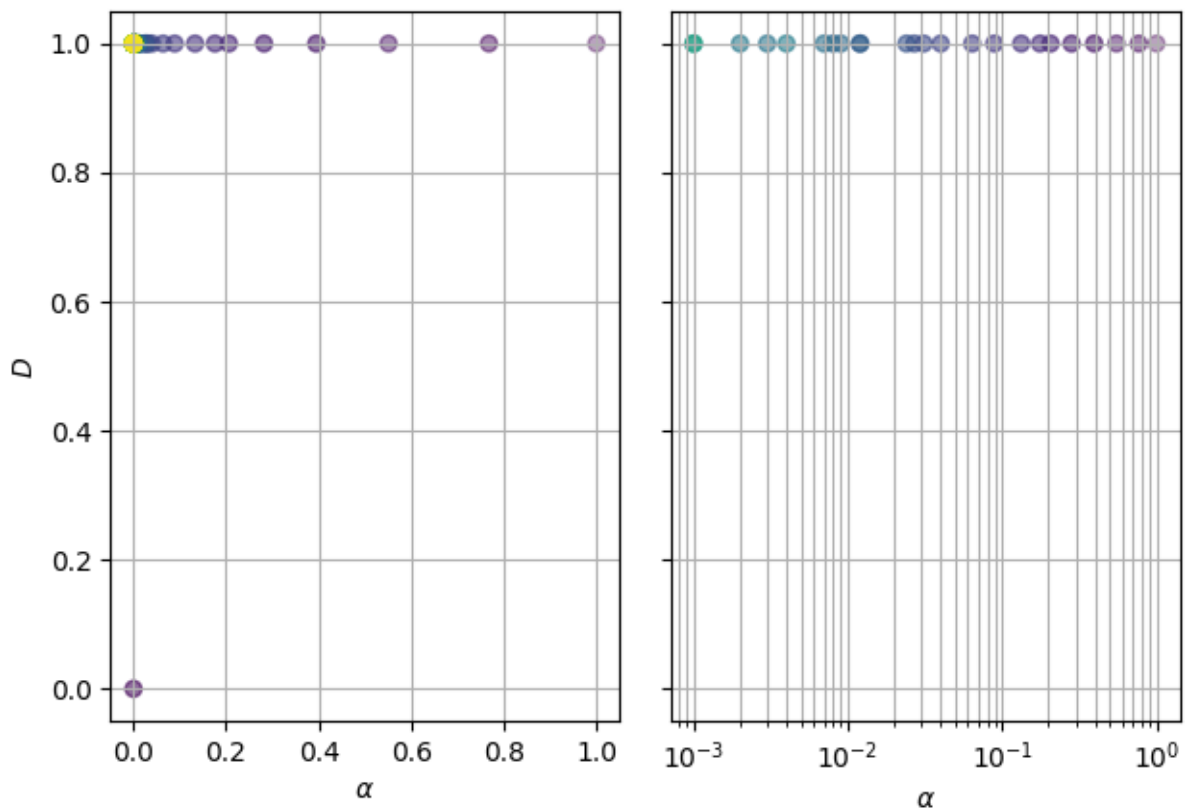
$$D = \begin{cases} 1, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha = 0 \end{cases} \quad (3)$$

III. Экспериментальные кривые обнаружения

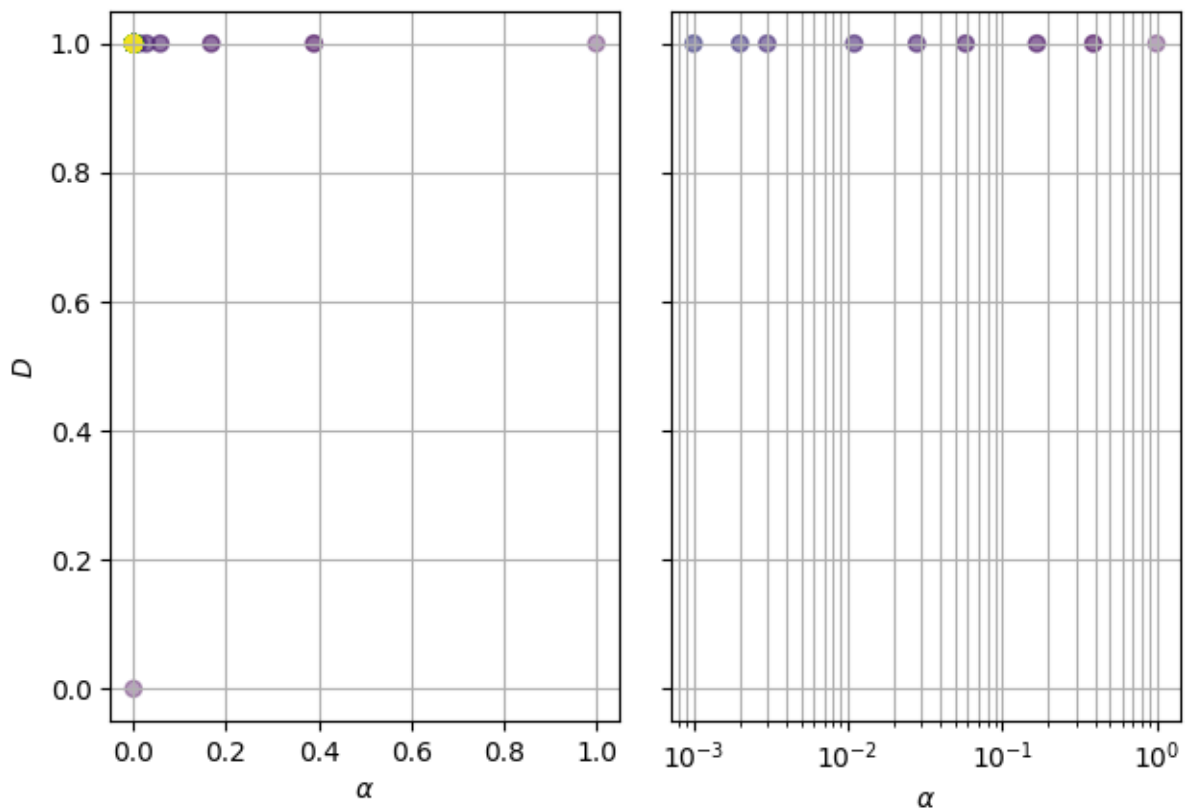
В нотбуке 1.ipynb выполняется моделирование полученного алгоритма обнаружения. Результаты также приводятся ниже:

Кривые обнаружения соответствуют теории (3). Распределение экспериментальных значений вероятности ложной тревоги при линейном изменении отношения $\frac{u}{\mu}$ соответствует закону их взаимозависимости (2).

$n = 5$

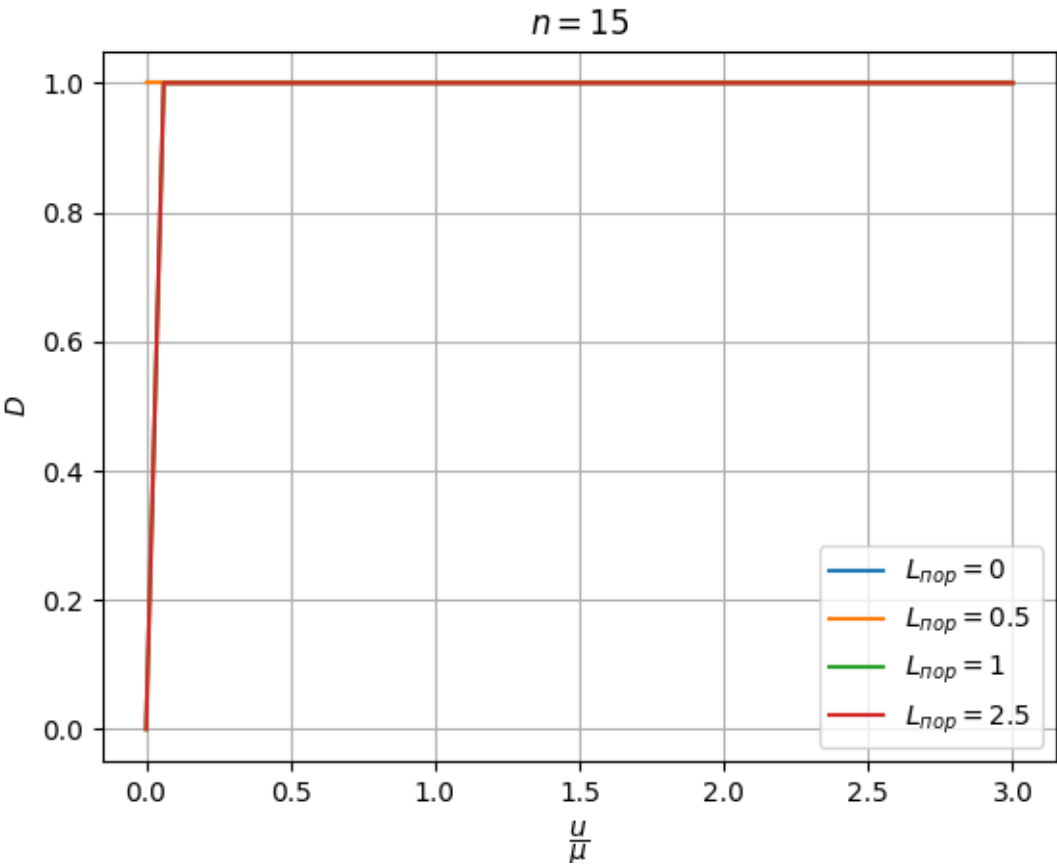
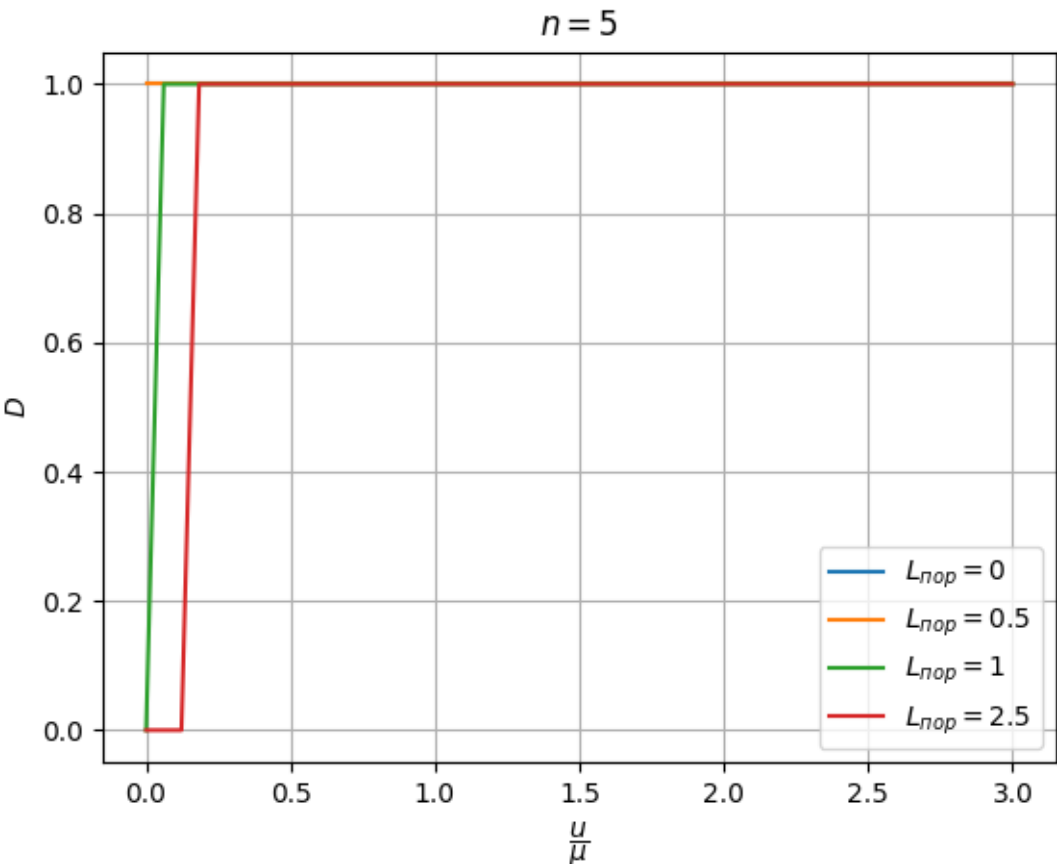


$n = 15$



Зависимость вероятности правильного обнаружения от отношения уровня сигнала к масштабному коэффициенту распределения шума равна 1 всюду кроме "отсечки" в 0 при

низких соотношениях сигнал/шум, когда $L_{\text{пор}}$ оказывается выше $e^{n\frac{u}{\mu}}$



Вероятность ложной тревоги также отсекается в 0 при больших $L_{\text{пор}}$.

